



Quattro colori? È sicuro!

Come si è arrivati alla dimostrazione verificata del problema dei quattro colori

Un dilemma che ha dato a lungo del filo da torcere ai matematici è il cosiddetto problema dei quattro colori. Fu proposto nel 1852 da Francis Guthrie, il quale notò che per colorare una mappa in modo che i paesi confinanti siano colorati diversamente sembra che quattro colori siano sufficienti.

Guthrie si accorse subito che bisognava imporre qualche restrizione sui confini dei paesi. Essi non possono ridursi a punti isolati: altrimenti basta considerare paesi disposti come le fette di una torta per dedurre che nessun numero finito di colori è sufficiente. Ma i confini non possono neppure essere troppo frastagliati: altrimenti, per dedurre di nuovo che nessun numero di colori è sufficiente basta considerare regioni che abbiano tutte uno stesso confine in comune, come quelle scoperte nel 1910 da Luitzen Brouwer.

Quando dunque i confini non sono né troppo semplici né troppo complessi, per accorgersi che effettivamente quattro colori sono necessari basta trovare una carta in cui ci sono quattro paesi, ciascuno confinante con gli altri tre. La cosa è talmente semplice da fare, che la si fa automaticamente quando si taglia una torta in tre fette, lasciando una parte rotonda al centro per evitare di rompere le punte.

Augustus De Morgan scoprì immediatamente che non è possibile invece che cinque paesi confinino ciascuno con gli altri quattro. Ma questo significa solo che non si può dimostrare nello stesso modo che cinque colori sono necessari. E non significa che quattro colori siano sufficienti, come supposero i molti dilettanti che per un secolo proposero dimostrazioni sbagliate della congettura dei quattro colori.

Nel 1879 Alfred Kempe propose una dimostrazione del problema geografico dei quattro colori. Il piano consisteva nel mostrare che le regioni confinanti con al più altre cinque regioni sono inevitabili, nel senso che ogni carta normale (tale cioè che in nessun punto si incontrano più di tre regioni) ne deve contenere almeno una. E che le carte contenenti configurazioni inevitabili sono riducibili ad altre con almeno una regione in meno, e colorabili con lo stesso numero di colori.

In realtà la dimostrazione di Kempe conteneva un errore, e dimostrava solo che cinque colori sono sufficienti. I tentativi di rimpicciolimento produssero da un lato insiemi sempre più grandi di configurazioni inevitabili, e dall'altro lato insiemi sempre più grandi di configurazioni riducibili. Ma solo nel 1976 Kenneth Appel e Wolfgang Haken produssero la soluzione del problema dei quattro colori, trovando un insieme di configurazioni sia inevitabili sia riducibili, e provando che quattro colori sono sufficienti.

L'aspetto interessante della dimostrazione di Appel e Haken non fu tanto la soluzione del problema, il cui interesse matematico era limitato, ma il metodo usato. Le loro 1482 configurazioni inevitabili e riducibili furono trovate per tentativi ed errori, a partire da un insieme di partenza di sole 500, in un processo di ricerca interattiva guidata dal calcolatore, che richiese un tempo macchina pari a 50 giorni ininterrotti.

Per la prima volta la dimostrazione di un teorema matematico si appoggiava dunque su conti che non potevano essere verificati a mano. E quando il lavoro che conteneva la dimostrazione fu presentato all'«Illinois Journal of Mathematics», il controllo del risultato fu effettuato

mediante un diverso programma, implementato su un diverso calcolatore. In seguito se ne fecero poi molte altre, con programmi diversi, ma sempre di lunghezza proibitiva.

Per credere alla correttezza di queste «disumane» dimostrazioni bisogna credere all'affidabilità del programma usato. Ma nel 2005 Georges Gonthier ha prodotto una dimostrazione verificata del teorema dei quattro colori con il programma Coq di Thierry Coquand. Coq è basato sul calcolo delle costruzioni, che costituisce una particolare versione del paradigma che negli ultimi decenni ha unito logica matematica e programmazione informatica.

In questo paradigma, quando si dimostra un teorema il sistema verifica automaticamente la dimostrazione. L'affidabilità delle singole dimostrazioni è dunque riversata sull'affidabilità del sistema, che riposa sull'affidabilità dell'intera logica matematica. Meglio di così sarebbe difficile fare, e questa diventerà probabilmente la prassi futura per la verifica delle dimostrazioni computerizzate, come quella del teorema dei quattro colori.



Soluzione all'americana. Una mappa degli Stati Uniti che illustra il problema dei quattro colori risolto nel 2005 con l'aiuto del computer.