Il matematico impertinente

di Piergiorgio Odifreddi
professore ordinario di logica matematica all'Università di Torino
e visiting professor alla Cornell University di Ithaca (New York)

Grandinate di numeri

Viaggio nel teorema di Goodstein, una proposizione vera ma non dimostrabile

La matematica abbonda di problemi facili da enunciare e difficili, se non impossibili, da risolvere. Un esempio famoso è stato proposto nel 1937 dal matematico tedesco Lothar Collatz, e consiste semplicemente in questo: dimostrare che quando si parte da un numero intero qualunque, se è pari lo si divide per 2, se è dispari lo si moltiplica per 3 e si aggiunge 1, e poi si continua a ripetere l'operazione, prima o poi si arriva a 1.

Per esempio, quando si parte da 6, si ottengono in successione 3 per il primo «se», 10 per il secondo, 5 per il primo, 16 per il secondo, e 8, 4, 2 e 1 tutti per il primo. Ma non sempre le cose vanno così lisce: per esempio quando si parte da 27 si sale e si scende un centinaio di volte, prima di arrivare a 1.

Con il computer si è verificato che effettivamente si arriva sempre a 1, partendo da qualunque numero con al massimo una ventina di cifre. E finora nessuno ha mai trovato un controesempio. Ma il problema è dimostrare che la cosa succede sempre: cioè che partendo da qualunque numero la successione che si ottiene non va all'infinito, e non entra nemmeno in «circoli viziosi» (*loop*) diversi da 1, 4, 2, 1.

La cosa è interessante non tanto di per sé, quanto per il fatto che non si ha idea di come si potrebbe dimostrare un simile risultato: come disse Paul Erdös, che pure con cose del genere ci sapeva fare, «la matematica non è matura per questo tipo di problemi». E così quella che viene variamente chiamata «congettura di Collatz», «congettura», «congettura dei chicchi di grandine» e altro ancora, rimane aperta.

Eppure ci sono problemi analoghi, a prima vista anche più complicati, che invece sono stati risolti. Per esempio quello proposto nel 1944 dal matematico inglese Reuben Goodstein in un articolo il cui titolo in italiano è *Sul teorema degli ordinali ristretti*. Questa volta, quando si parte da un numero intero qualunque, lo si scrive ereditariamente in base 2 (cioè si scrive non solo il numero in base 2, ma anche gli esponenti della base, e gli esponenti degli esponenti, e così via), si cambia la base da 2 a 3 e si sottrae 1. Poi si scrive ereditariamente il risultato in base 3, e si ricomincia.

Beth Yates/ImageZoo/Corbis

Per esempio, partendo dal 4, lo si scrive in base 2: cioè 2 alla 2. Poi si cambia la base da 2 a 3, ottenendo 3 alla 3, e si sottrae 1, ottenendo 26. Ora si scrive 26 in base 3: cioè, 2 per 3 alla 2, più 2 per 3, più 2. Poi si cambia la base da 3 a 4, e si sottrae 1, ottenendo 41. E si ricomincia. Visto che a ogni passo si fa un balzo a una base più alta, e si sottrae un misero 1, si può immaginare che la successione 4, 26, 41 cresca all'infinito, come infatti sembra fare.

Il teorema dimostrato da Goodstein dice invece che, qualunque sia il numero di partenza, prima o poi la successione comincia a scendere, e alla fine arriva a 0. Anche se può metterci parecchio a farlo: per esempio quella che parte da 4 continua a salire finché si raggiungono valori con centinaia di milioni di cifre, dopo un numero corrispondente di passi. Ma con numeri di partenza maggiori la crescita è molto più veloce: per esempio partendo da 20 basta una decina di passi per raggiungere valori con centinaia di milioni di cifre, e si va avanti molto più a lungo, prima di scendere.

Il motivo per cui il teorema di Goodstein funziona è suggerito cripticamente dal titolo del suo articolo. È infatti possibile dividere i numeri di ciascuna successione in gruppi, e ordinare questi gruppi assegnando a ciascuno un numero «ordinale» transfinito del tipo inventato, o scoperto, nell'Ottocento da Georg Cantor. L'assegnazione è tale che, quando si sale di base, si rimane nello stesso gruppo, ma quando si sottrae 1 si scende in un gruppo con un ordinale minore. E poiché gli ordinali, come gli interi, non possono scendere all'infinito, prima o poi si arriva a 0.

La dimostrazione di Goodstein poggia sul principio di induzione, che dice che gli ordinali non possono scendere all'infinito. Ma nel 1982 Laurie Kirby e Jeff Paris, nell'articolo *Risultati accessibili di indipendenza nell'aritmetica di Peano*, hanno dimostrato che l'induzione che serve per la dimostrazione di Goodstein è più di quanta se ne possa fare nell'aritmetica. In altre parole, il risultato di Goodstein è un esempio concreto di fenomeno gödeliano: una proposizione vera ma non dimostrabile nell'aritmetica. E forse la difficoltà della congettura si nasconde dietro un analogo fenomeno di indipendenza, da sistemi ancora più forti dell'aritmetica.