di Piergiorgio Odifreddi
professore ordinario di logica matematica all'Università di Torino
e visiting professor alla Cornell University di Ithaca (New York)

Scomposizioni indiziarie

Anche il matematico può partire da tracce per poi formare un quadro complesso

Nei romanzi polizieschi a volte il *detective* riesce a leggere semplici indizi come tracce di avvenimenti complessi. Lo stesso può fare il matematico, che a volte riesce a leggere semplici scomposizioni aritmetiche come segni di profonde proprietà dei numeri.

Una prima scomposizione apparentemente banale è quella di 3 come somma di 1 e 2. In realtà, è l'indizio che 3 è numero triangolare, rappresentabile graficamente con tre pallini disposti a triangolo equilatero: uno sopra, e due sotto. E la scomposizione suggerisce che i numeri triangolari si generano sommando via via gli interi in ordine di grandezza, cioè 1, 2, 3, 4, 5, eccetera, ottenendo 1, 3, 6, 10, 15, eccetera.

Sinteticamente, i numeri triangolari si esprimono mediante la formula $n(n + 1)/2$, che calcola da un lato la somma dei numeri da 1 a n, e dall'altro l'area di un triangolo di base n e altezza $n + 1$. In particolare, 3 è l'unico numero primo triangolare.

Da un altro punto di vista, la scomposizione di 3 come somma di 1 e 2 è l'indizio che esso è un numero di Fibonacci: cioè, appartiene alla sequenza che parte dai primi due numeri interi (1 e 2, appunto, ma volendo anche 0 e 1), e continua sommando ogni volta gli ultimi due numeri ottenuti. I numeri di Fibonacci sono dunque 1, 2, 3, 5, 8, eccetera.

Una seconda scomposizione apparentemente banale è quella di 4 come somma di 1 e 3. In realtà, è l'indizio che 4 è un numero quadrato, rappresentabile con quattro pallini disposti a quadrato: uno a un vertice, e tre attorno a squadra. E la scomposizione suggerisce che i numeri quadrati si possono generare sommando via via un intero ogni due, ossia i numeri dispari: sommando infatti consecutivamente i numeri 1, 3, 5, 7, 9, eccetera, si ottengono 1, 4, 9, 16, 25, eccetera.

La stessa scomposizione è anche l'indizio che ogni numero quadrato è la somma di due numeri triangolari consecutivi: sommando infatti due a due i numeri 1, 3, 6, 10, 15, eccetera, si ottengono di nuovo 1, 4, 9, 16, 25, eccetera.

Infine, la scomposizione mostra che 4 è la somma dei primi numeri triangolari, e dunque un numero tetraedrico, scomponibile in una piramide di strati triangolari equilateri. I numeri tetraedrici si ottengono sommando successivamente i numeri triangolari 1, 3, 6, 10, 15, eccetera, e sono 1, 4, 10, 20, 35, eccetera.

Una terza scomposizione apparentemente banale è quella di 5 come somma di 1 e 4. In realtà, è l'indizio che 5 è un numero pentagonale, rappresentabile graficamente con cinque pallini disposti a pentagono. E la scomposizione suggerisce che i numeri pentagonali si possono generare sommando progressivamente un numero intero ogni tre, cioè 4, 7, 10, 13, eccetera, ottenendo via via 1, 5, 12, 22, 35, eccetera.

Sinteticamente, i numeri pentagonali si esprimono mediante la formula $n(3n - 1)/2$. La formula può anche essere usata con numeri negativi, nel qual caso genera un'altra serie parallela di numeri: 2, 7, 15, 26, 39, eccetera. Messe insieme le due serie, nel 1740 Eulero ottenne i numeri pentagonali generalizzati: 1, 2, 5, 7, 12, 15, eccetera. E scoprì che servono a generare i numeri delle partizioni degli interi: cioè i numeri di somme distinte in cui si possono scomporre i vari interi.

La scomposizione di 5 come somma di 1 e 4 mostra anche che 5 è la somma dei primi numeri quadrati, e dunque un numero piramidale a base quadrata, scomponibile in una piramide di strati quadrati. I numeri piramidali a base quadrata si ottengono sommando successivamente i numeri quadrati 1, 4, 9, 16, 25, eccetera, e sono 1, 5, 14, 30, 55, eccetera.

timquo/Shutterstock

A questo punto, il gioco può continuare all'infinito. Da un lato, come sommare un intero dietro l'altro produce i numeri triangolari, un intero ogni due i numeri quadrati, e un intero ogni tre i numeri pentagonali, così sommare un intero ogni quattro produce i numeri esagonali, un intero ogni cinque i numeri ettagonali, eccetera: cioè, le varie sottofamiglie della famiglia dei numeri poligonali.

Dall'altro lato, sommare successivamente i numeri triangolari, quadrati, pentagonali, eccetera, produce i numeri piramidali a base triangolare, quadrata, pentagonale, eccetera. A dimostrazione che la matematica non ha nulla da invidiare a una *detective story*, quanto a uso degli indizi apparentemente banali.