ULTRAFILTRI, DITTATORI E DEI

Piergiorgio Odifreddi

Ottobre 1993

[1]

Vogliamo mostrare come un ben noto ed elementare fatto sugli ultrafiltri possa essere reinterpretato sia politicamente che teologicamente, e fornire così una dimostrazione immediata di due risultati centrali in tali campi.[2] I matematici possono considerare simili formulazioni come la vera essenza di tali risultati. Gli altri si possono consolare con Goethe, che disse una volta: "I matematici sono come i francesi. Non appena si dice loro qualcosa, la traducono nella loro lingua, ed essa appare subito diversa".

Ultrafiltri

Nel 1937 Henri Cartan introdusse le seguenti nozioni. Dato un insieme A di elementi, sia $\mathcal{A}$ un sottoinsieme dell'insieme delle parti di A, cioè un insieme di sottoinsiemi di A. Indichiamo gli elementi di A con lettere minuscole come x e y, i sottoinsiemi di A con lettere maiuscole come X e Y, e consideriamo le seguenti possibili proprietà di $\mathcal{A}$:

1. $\mathcal{A}$ è chiuso all'insù rispetto alla relazione di contenimento (cioè, se $X \in \mathcal{A}$ e $X \subseteq Y$ allora $Y \in \mathcal{A}$)

2. $\mathcal{A}$ è chiuso rispetto all'intersezione (cioè, se $X \in \mathcal{A}$ e $Y \in \mathcal{A}$ allora $X \cap Y \in \mathcal{A}$)

[1] Testo di una conferenza al CUNY Graduate Center di New York, 6 Settembre 1994, e al Wesleyan College di Middletown, 10 Febbraio 1995.

[2] Ci concentriamo qui sugli aspetti matematici, e rinviamo a *La democrazia impossibile* e *La prova di Dio* per una discussione più generale dei due risultati.

3. $\mathcal{A}$ non contiene ogni sottoinsieme di A (cioè, esiste almeno un X che non sta in $\mathcal{A}$)

4. dato un qualunque sottoinsieme di $\mathcal{A}$, o esso o il suo complemento stanno in $\mathcal{A}$ (cioè, $X \in \mathcal{A}$ o $\overline{X} \in \mathcal{A}$).

$\mathcal{A}$ si chiama **filtro** su A se soddisfa alle proprietà 1 e 2. L'idea è che $\mathcal{A}$ consista di sottoinsiemi 'grandi' di A, e le due proprietà 1 e 2 sono evidentemente necessarie: se un insieme è più grande di uno grande, è a maggior ragione grande; e se due insiemi sono grandi, la loro intersezione dovrebbe ancora essere grande. Esempi di filtri sono i seguenti:

- I sottoinsiemi di A contenenti un dato elemento x; questo filtro si chiama **filtro principale** generato da x.

- I sottoinsiemi cofiniti di A (cioè contenenti tutti gli elementi di A eccetto al più un numero finito); tale filtro non è principale perchè, dato un qualunque elemento x, l'insieme $A - \{x\}$ ottenuto togliendo x da A è cofinito (dunque sta nel filtro considerato), ma non contiene x (dunque non sta nel filtro principale generato da x).

Le proprietà 1 e 2 non sono sufficienti ad escludere il fatto che $\mathcal{A}$ contenga anche sottoinsiemi 'piccoli' di A. Ad esempio, niente impedisce che $\mathcal{A}$ contenga *tutti* i sottoinsiemi di A: la proprietà 3 è introdotta proprio per evitare questa possibilità estrema, ed un filtro che la soddisfi si chiama **filtro proprio**. A causa della proprietà 1, *un filtro è proprio se e solo se non contiene l'insieme vuoto* $\emptyset$ (perchè questo è contenuto in ogni sottoinsieme di A).

La proprietà 4 è in un certo senso opposta alla 3: mentre questa si preoccupa di evitare che un filtro sia troppo grande, quella si preoccupa di evitare che esso sia troppo piccolo, ed un filtro proprio che la soddisfi si chiama **ultrafiltro**. Tornando agli esempi di filtri presentati poco sopra, si noti che:

- Un filtro principale è un ultrafiltro: se x lo genera, x sta o in X o in $\overline{X}$.

- I sottoinsiemi cofiniti di A non sono un ultrafiltro: se A è finito, perchè essi formano un filtro che non è proprio; se A è infinito, perchè esiste un sottoinsieme X di A tale che sia X che $\overline{X}$ sono infiniti, e quindi tale che nè X nè $\overline{X}$ sono cofiniti.

Il fatto cui si accennava agli inizi è il seguente.

Teorema 1 *Se l'insieme A è finito, ogni ultrafiltro su A è un filtro principale.*

Dimostrazione. Siano $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su un insieme finito A, ed I l'intersezione di tutti gli elementi di $\mathcal{U}$.

Poichè A ha solo un numero finito di elementi, ha anche solo un numero finito di sottoinsiemi, e quindi $\mathcal{U}$ stesso è finito. I si ottiene dunque mediante un numero finito di intersezioni di elementi di $\mathcal{U}$, e per la proprietà 2 esso sta in $\mathcal{U}$.

Per la proprietà 3, I non può essere vuoto: esso contiene dunque un elemento x.

Per la proprietà 4, o $\{x\}$ o $\overline{\{x\}}$ stanno in $\mathcal{U}$. Ma non è possibile che $\overline{\{x\}}$ stia in $\mathcal{U}$, perchè esso non contiene x, che sta in I, e quindi in tutti gli elementi di $\mathcal{U}$. Allora $\{x\}$ sta in $\mathcal{U}$, e quindi $I = \{x\}$.

Ma allora $\mathcal{U}$ è il filtro principale generato da x: infatti da un lato ogni elemento di $\mathcal{U}$ contiene x, per definizione di I; e dall'altro se X contiene x come elemento allora contiene $\{x\}$ come sottoinsieme, e dunque sta in $\mathcal{U}$ per la proprietà 1. $\square$

Corollario 2 *Un ultrafiltro su A che contenga l'intersezione di tutti i suoi elementi è un filtro principale.*

Dimostrazione. L'assunzione di finitezza di A nel teorema precedente è usata soltanto per dedurre che l'intersezione di tutti gli elementi dell'ultrafiltro è nell'ultrafiltro. $\square$

Notiamo di passaggio che i risultati appena enunciati non sono veri in modo banale, perchè su ogni insieme infinito A esistono ultrafiltri non principali (senza dimostrazione: un qualunque ultrafiltro contenente gli insiemi cofiniti).

Dittatori

Nel 1785 Jean Antoine Nicolas Marie de Caritat (meglio noto come il marchese di Condorcet) scoprì il seguente paradosso del sistema di votazione a maggioranza. Si considerino tre votanti 1, 2 e 3, che debbano scegliere rispetto alle alternative A, B e C. Supponiamo che si abbiano i seguenti ordini ciclici di preferenze:

$$\begin{array}{llll} 1: & A & B & C \\ 2: & B & C & A \\ 3: & C & A & B, \end{array}$$

da leggersi nel modo seguente: 1 preferisce A a B e B a C, 2 preferisce B a C e C ad A, e 3 preferisce C ad A ed A a B. Quando si pongano in votazione le alternative due a due, A vince su B per due voti (quelli di 1 e 3) ad uno (quello di 2), ed analogamente B vince su C per due voti (1 e 2) ad uno (3): si potrebbe allora pensare che A dovrebbe vincere su C, mentre succede il contrario, e C vince su A per due voti (2 e 3) ad uno (1).

L'aspetto paradossale della faccenda è che, mentre le preferenze individuali dei votanti sono ordinate linearmente, l'ordine sociale che si ottiene votando a maggioranza diventa circolare.

Nel 1951 Kenneth Arrow si pose il problema di trovare un sistema di votazione che permetta di preservare l'ordine lineare delle preferenze. Sia dunque dato un insieme di votanti, e si chiami un suo sottoinsieme X *decisivo* se, poste in votazione due alternative, una di esse vince quando tutti gli elementi di X votano per essa, e tutti gli elementi di $\overline{X}$ votano per l'altra.[3]

La nozione di insieme decisivo ha senso nell'ipotesi di *dipendenza dal voto*, cioè quando la determinazione della vincitrice fra due alternative dipende soltanto dai voti che esse ricevono (in base agli ordini di preferenza individuali), e non da altri fattori dipendenti dalle alternative stesse.

L'assunzione di Arrow è:

Assioma 3 *Gli insiemi decisivi formano un ultrafiltro sull'insieme dei votanti.*

Essa si può giustificare nel modo seguente.

La proprietà 1 dice che se un insieme di votanti è decisivo, tale è anche ogni insieme che lo contiene. In altre parole, se una alternativa vince in una votazione quando riceve un certo numero di voti a favore, essa continua a vincere se riceve ancora più voti (*monotonicità*).

[3]Nella votazione a maggioranza, gli insiemi decisivi sono quelli con almeno la metà più uno dei votanti. Essi soddisfano le proprietà 1, 3 e 4 (quest'ultima nell'ipotesi che l'insieme dei votanti abbia un numero dispari di elementi), ma non la proprietà 2 (per la Proposizione 4 e il paradosso di Condorcet).

La proprietà 3 dice che non ogni insieme è decisivo, il che è ovvio se si vuole che al più una fra due alternative vinca in una votazione.

La proprietà 4 dice che o un insieme o il suo complementare sono decisivi, il che è ovvio se si vuole che almeno una fra due alternative vinca in una votazione (cioè che non ci siano pareggi).

Il fatto essenziale che giustifica l'assioma di Arrow è il seguente.

Proposizione 4 *La proprietà 2, cioè il fatto che l'intersezione di due insiemi decisivi sia decisiva, è equivalente al fatto che l'ordine sociale sia lineare.*

Dimostrazione. Supponiamo che X ed Y siano decisivi, ma che $X \cap Y$ non lo sia: allora $\overline{X \cap Y}$ è decisivo per la proprietà 4. Si considerino i seguenti ordini di preferenze:[4]

$$\begin{array}{rccc} X \cap Y: & A & B & C \\ Y - X: & B & C & A \\ X - Y: & C & A & B \\ \overline{X \cup Y}: & C & B & A, \end{array}$$

da leggersi nel modo seguente: ogni votante nell'insieme a sinistra ha l'ordine di preferenza indicato a destra. Allora A vince su B perchè ogni elemento di X preferisce A a B, ogni elemento di $\overline{X}$ preferisce B ad A, e X è decisivo; analogamente B vince su C perchè Y è decisivo, e C vince su A perchè $\overline{X \cap Y}$ è decisivo. Dunque l'ordine sociale non è lineare.

Viceversa, dato un qualunque sistema di ordini di preferenze individuali, consideriamo gli insiemi X, Y e Z dei votanti che preferiscono, rispettivamente, A a B, B a C ed A a C. Se A vince su B allora X deve essere decisivo, altrimenti $\overline{X}$ sarebbe decisivo per la proprietà 4, e B vincerebbe su A. Analogamente, se B vince su C allora Y deve essere decisivo. Se l'intersezione di due insiemi decisivi è decisiva, $X \cap Y$ è decisivo. Poichè ogni suo elemento preferisce A a B (perchè sta in X) e B a C (perchè sta in Y), e dunque A a C (perchè gli ordini individuali sono lineari), si ha che $X \cap Y \subseteq Z$; per la proprietà 4 anche Z è decisivo, e allora A vince su C. Dunque l'ordine sociale è lineare. □

[4]Si noti l'analogia con il sistema di preferenze usato per il paradosso di Condorcet.

Si noti come la dimostrazione precedente abbia utilizzato l'ipotesi che Arrow chiama di *libertà individuale*: ogni possibile combinazione di ordini di preferenze è ammissibile.

A questo punto, poichè l'insieme dei votanti è ovviamente finito in ogni applicazione, possiamo usare il teorema sugli ultrafiltri, ed ottenere una versione del risultato di Arrow.

Teorema 5 *Gli insiemi decisivi formano un filtro principale.*

In altre parole, esiste un votante che da solo determina il risultato di qualunque votazione. Arrow chiama tale votante *dittatore*, e deduce da ciò che non è possibile trovare un sistema democratico di votazioni che soddisfi alle condizioni minimali usate nella giustificazione dell'assioma che gli insiemi decisivi formano un ultrafiltro (in particolare, la dipendenza dal voto, la monotonicità e la libertà individuale): ogni possibile sistema genera una dittatura, e la democrazia è impossibile.[5]

Dei

Nel 1077 Anselmo d'Aosta scoprì la seguente dimostrazione dell'esistenza di Dio, detta *prova ontologica*. Si definisca Dio come l'essere che ha tutte le perfezioni; poichè l'esistenza è una perfezione, esso esiste.

L'aspetto insoddisfacente della faccenda è che da un lato niente assicura che la definizione non sia contraddittoria, e dall'altro che l'esistenza non si può considerare come una proprietà, e quindi come una perfezione.

Nel 1970 Kurt Gödel si pose il problema di riformulare la prova ontologica in modo assiomatico, per renderla logicamente più accettabile. L'idea è di sostituire alle perfezioni le *proprietà positive*, intese come particolari sottoinsiemi dell'insieme degli elementi che costituisce il mondo.[6]

L'assunzione di Gödel è:

[5] L'enormità di questa conclusione non deve far credere che Arrow sia necessariamente da ritenere uno squilibrato: egli ha ricevuto il Premio Nobel per l'economia nel 1972, proprio per questo risultato.

[6] Una proprietà si può identificare con il sottoinsieme degli elementi che la soddisfano, ed un sottoinsieme si può identificare con la proprietà di appartenere ad esso. Implicazione, congiunzione e negazione corrispondono allora a contenimento, intersezione e complemento.

Assioma 6 *Le proprietà positive formano un ultrafiltro sul mondo.*

Più esplicitamente, si assume che: una proprietà che ne contiene una positiva sia positiva; l'intersezione di due proprietà positive sia positiva; una proprietà positiva non sia vuota; il complemento di una proprietà non positiva sia positiva.

Tali assunzioni si possono giustificare per analogia con le proprietà dei numeri (ad esempio, razionali o reali), dove: un numero maggiore di uno positivo è positivo; il prodotto di due numeri positivi è positivo; un numero positivo non è nullo; l'opposto di un numero non positivo è positivo.

A questo punto, se si fa l'ulteriore assunzione della *finitezza del mondo* possiamo applicare il teorema sugli ultrafiltri, ed ottenere una versione del risultato di Gödel.

Teorema 7 *Le proprietà positive formano un filtro principale.*

In altre parole, esiste un oggetto che è determinato dalle proprietà positive. Gödel chiama tale oggetto *dio*[7] e deduce da ciò che dio esiste, sulla base delle condizioni minimali usate nella giustificazione dell'assioma che le proprietà positive formano un ultrafiltro, e sulla base della finitezza del mondo.

Per eliminare quest'ultima assunzione, che non sembra essere soddisfacente in una discussione teologica, Gödel propone un ulteriore assioma (che probabilmente non sarebbe stato accettato da Dostoevskij).

Assioma 8 *Essere dio è una proprietà positiva.*

Poichè la proprietà di essere dio è, per definizione, l'intersezione di tutte le proprietà positive, questo assioma ha come effetto quello di rendere tale intersezione un elemento dell'ultrafiltro delle proprietà positive. Per il corollario del teorema sugli ultrafiltri, tale ultrafiltro è allora un filtro principale, e di qui segue l'esistenza di dio come sopra.

[7]Siamo passati da 'Dio' a 'dio' perchè il dio determinato da un dato ultrafiltro è unico (per la dimostrazione del Teorema 1), ma ultrafiltri diversi possono determinare dèi diversi.

Conclusione

Il teorema sugli ultrafiltri ha mostrato che esiste una connessione fra l'esistenza di dittatori e dei; immaginiamo che sarà difficile renderla più esplicita, a parte ovvietà del tipo: Dio può essere considerato un dittatore, o i dittatori amano farsi considerare dei. Poichè però, come ci ha insegnato Umberto Eco, su ciò di cui non si può teorizzare si deve narrare, terminiamo con un aneddoto.

Nel 1948 Gödel dovette sostenere l'esame per ottenere la cittadinanza statunitense, studiò a tale proposito la costituzione, e scoprì che in essa esisteva una possibilità logico-legale di trasformare gli Stati Uniti in una dittatura. Nel viaggio in macchina per recarsi all'udienza, Einstein (che era il suo testimone) fu aggiornato sulla scoperta, e cercò di convincerlo che quella non era la sede più adatta per comunicarla. Ma il caso volle che il giudice, notato che Gödel era di origine austriaca e riferendosi all'annessione dell'Austria da parte di Hitler nel 1938, gli dicesse che ora in America egli non doveva più temere l'avvento di un dittatore. Einstein dovette intervenire prontamente per sviare il discorso, visto che Gödel aveva immediatamente colto l'occasione, ed iniziato una comunicazione della sua più recente scoperta.

Non sappiamo quale dimostrazione della possibilità di una dittatura negli Stati Uniti Gödel avesse trovato. Gli sviluppi successivi riportati in questo articolo permettono però al lettore di formulare un'ovvia congettura.